Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Γ) α) ΨΕΥΔΗΣ

β) πχ $f(x)=x^3$, $f'(0)=0$

Αφού η f 1-1 δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha, \beta]$

με $f(\alpha)=f(\beta)$

Δ) 1. ΛΑΘΟΣ 3 ΣΩΣΤΟ 5. ΛΑΘΟΣ

2 ΛΑΘΟΣ 4. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1. $|f(x)| = 2\sqrt{x^2+x+4}$, Έστω $f(x)=0$ τότε $2\sqrt{x^2+x+4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+4}=0$

$\Leftrightarrow x^2+x+4=0$ Αδύνατο αφού $\Delta<0$.

Άρα $f(x)\neq 0$ και συνεχής οπότε έχει σταθερό πρόσημο

Αφού $f(0)=4$ η $f(x)>0$

Συνεπώς $f(x)=2\sqrt{x^2+x+4}$

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

2. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x^2+x+4}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2|x|\sqrt{1+1/x+4/x^2}}{x}$ $\frac{x\to+\infty}{x>0}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x\sqrt{1+\frac{1}{x}+4/x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+1/x+4/x^2} = 2 = \lambda$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2\sqrt{x^2+x+4}-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\,\frac{x^2+x+4-x^2}{\sqrt{x^2+x+4}+x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2\,\frac{\cancel{x}(1+4/x)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right]} = 2\frac{1}{2} = \beta = 1$ Άρα $y=2x+1$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Παρατηρήσεις

Στο $-\infty$:

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2+x+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\cancel{x}\sqrt{1+1/x+4/x^2}}{\cancel{x}}=-2=\lambda$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

• $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2+x+4}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}2\frac{x^2+x+4-x^2}{\sqrt{x^2+x+4}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}2\frac{x+4}{-x\sqrt{1+1/x+4/x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty}2\frac{\cancel{x}(1+4/x)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+1/x+4/x^2}+1\right)}=-1=\beta$

οπότε η $\boxed{y=-2x-1}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

3. Αρκεί να $x_0\in A_f$: $f'(x_0)=1/2$ $\left(\lambda_{εφ}=\lambda_ε \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{1}{2}\right)$

$f(x)=2\sqrt{x^2+x+4}$ τότε $f'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+4}}$

$f'(x)=1/2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x+2=\sqrt{x^2+x+4}$, πρέπει $4x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{-1}{2}$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

τότε $(4x+2)^2=x^2+x+4 \Leftrightarrow 16x^2+16x+4=x^2+x+4 \Leftrightarrow$

$15(x^2+x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$, η $x=-1$ Απορ αφού

Τότε εφ: $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-4=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x+4}$

4. Έστω $g(x)=f(x)(x-1)(x-2)+x-2+x-1=f(x)(x-1)(x-2)+2x-3$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

$g(1)=-1$ και $g(2)=1$ οπότε $g(1)g(2)<0$

Απο Θ.Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$: $g(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f(x_0)(x_0-1)(x_0-2)+x_0-2+x_0-1=0 \xrightarrow[x_0\in(1,2)]{:(x_0-1)(x_0-2)}$

$\Leftrightarrow f(x_0)+\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}=0$.

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΘΕΜΑ 3ο

1. Αφού ισχύει το θ.Rolle στο $[-4,1]$ ισχύουν:
   - $f(-4)=f(1)$
   - f συνεχής στο $[-4,1] \Rightarrow f$ συνεχής στο 0
   - f παρ/μη στο $(-4,1) \Rightarrow f$ παρ/μη στο 0.

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $f(-4)=f(1) \Leftrightarrow \sqrt{25}-\alpha=(1-\beta)e-1 \Leftrightarrow \boxed{6-\alpha=(1-\beta)e}$ ①
- f συνεχής στο 0: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\sqrt{x^2+9}-\alpha\right)=\lim_{x\to 0^+}\left((x-\beta)e^x+x^2-2\right)$$

$$3-\alpha=-\beta-2 \Leftrightarrow \boxed{-\alpha=-\beta-5}\ ②$$

$$① \overset{(2)}{\Longrightarrow} 6-\beta-5=(1-\beta)e \Leftrightarrow 1-\beta=(1-\beta)e \Leftrightarrow \beta=1 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \alpha=6$$

2. Για $x<0$: $f(x)=\sqrt{x^2+9}-6$, $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Για $x>0$: $f(x)=(x-1)e^x+x^2-2$, $f'(x)=e^x+(x-1)e^x+2x = xe^x+2x$
$f'(x)=(x+2)e^x$

Για $x=0$:

- $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-6-(-3)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(\sqrt{x^2+9}+3)}=0$$

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{(x-1)e^x+x^2-2-(-3)}{x}=$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)e^x+x^2+1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+(x-1)e^x+2x}{1}=0$$

Άρα $f'(0)=0$

έτσι $f'(x)=\begin{cases}(x+2)e^x & , x>0\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & , x\le 0\end{cases}$

Για $x>0$: $f(x)=(x-1)e^x+x^2-2$, $f'(x)=xe^x+2x>0 \Rightarrow f$ ↑ $\to$ 1ου πολύ ρίζα.
$f(1)=-1$, $f(2)=e^2+2$ άρα $f(1)f(2)<0$ και f συνεχής στο $[1,2]$
από Θ Bolzano $\exists\, x_0\in(1,2)$: $f(x_0)=0$ αφού f ↑ το x_0 μοναδικό.

3. Αρκεί $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-6))=0$. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+9}-6+x+6)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+9-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+9}-x}=0$

Άρα η $y=-x-6$ πλ. ασύμπτωτη στο $-\infty$ και τότε θα ισχύουν τα όρια $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ και $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-6$

(5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{3f^2(x)+4x^3\eta\mu(1/x)}{x^2f(x)+x^3+7x^2} \quad :x^2\neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+4x\cdot\eta\mu(1/x)}{f(x)+x+7}=A$$

Αφού η $y=-x-6$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-6$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\,\eta\mu\frac{1}{x} \;\underset{\substack{\text{για } x\to-\infty\\ \text{το } u\to 0}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\; \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

οπότε $A=\frac{3(-1)^2+4\cdot 1}{-6+7}=\frac{3+4}{1}=7$.

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

4.

Η ζητούμενη εξίσωση: $x(e^x+2)\ln(2-x) = \frac{f(x)}{2-x}$

$\Leftrightarrow x(e^x+2)\ln(2-x) - \frac{f(x)}{2-x} = 0$

$\Leftrightarrow f'(x)\ln(2-x) + f(x)(\ln(2-x))' = 0$

$\Leftrightarrow (f(x)\ln(2-x))' = 0$

Έστω $K(x) = f(x)\ln(2-x)$

$K(1) = 0$

$K(x_0) = 0$ (από ii $x_0 \in (1,2): f(x_0) = 0$)

Τότε $K(1) = K(x_0)$ και K συνεχής στο $[1, x_0]$ ως πρ. συνεχών. Από Θ Rolle $\exists\ \xi \in (1, x_0) \subseteq (1,2)$: $K'(\xi) = 0$ οπότε και η ζητούμενη εξίσωση παρουσιάζει ρίζα.

(5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

ΘΕΜΑ 4ο

1. $f^2(x) + 2f(x)\ln x - 3\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)\ln x + \ln^2 x = 4\ln^2 x$

$\Leftrightarrow (f(x)+\ln x)^2 = 4\ln^2 x \Leftrightarrow |f(x)+\ln x| = 2|\ln x|$ (1)

Έστω $h(x) = f(x) + \ln x$ συνεχής ως πράξεις συνεχών

Αν $h(x) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2|\ln x| = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Συνεπώς στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ $h(x) \neq 0$ και αφού είναι συνεχής σε καθε ένα απο αυτά έχει σταθερό πρόσημο.

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

• $h(e) = f(e) + \ln e = 2 > 0 \Rightarrow h(x) > 0$ στο $(1,+\infty)$ $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x) + \ln x = 2\ln x$

$\Leftrightarrow f(x) = \ln x$

• $h(1/e) = f(1/e) + \ln 1/e = -2 < 0 \Rightarrow h(x) < 0$ στο $(0,1)$ $\overset{(1)}{\Rightarrow} -(f(x)+\ln x) = -2\ln x$

$\Leftrightarrow f(x) = \ln x$

Άρα $f(x) = \ln x$ για $x \in (0,+\infty)$

Παρατηρήσεις

2. Αν $M(x, f(x))$ το x μεταβαλλόμενο μέγεθος ως προς t άρα $x = x(t)$. Από υπόθεση $x'(t) = 2$.

$E = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{x \ln x}{2}$ τότε

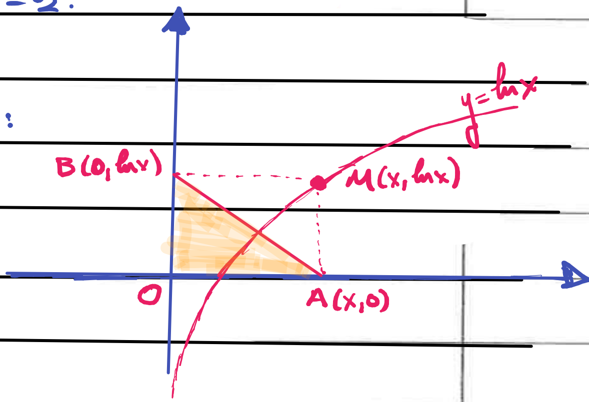
$E(t) = \frac{1}{2} x(t) \ln x(t)$ με παρ/ση:

$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t) \ln x(t) + \frac{1}{2} x'(t)$

$\xrightarrow[x(t_0) = e^2]{t = t_0} E'(t_0) = \frac{1}{2} 2 \cdot \ln e^2 + \frac{1}{2} \cdot 2$

$= 3$ μον²/sec.

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)



3. Ισχύει: $e^{(g(2)-10)^2} - e^{(80-g(2))^2} = 2f\left(\left|\frac{80-g(2)}{g(2)-10}\right|\right)$

$\Leftrightarrow e^{(g(2)-10)^2} - e^{(80-g(2))^2} = 2\ln\left|\frac{80-g(2)}{g(2)-10}\right|$

$\Leftrightarrow e^{(g(2)-10)^2} - e^{(80-g(2))^2} = \ln \frac{(80-g(2))^2}{(g(2)-10)^2} \Leftrightarrow$

$e^{(g(2)-10)^2} - e^{(80-g(2))^2} = \ln(80-g(2))^2 - \ln(g(2)-10)^2$

$e^{(g(2)-10)^2} + \ln(g(2)-10)^2 = e^{(80-g(2))^2} + \ln(80-g(2))^2 \quad (2)$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Έστω $K(x) = e^x + \ln x$ τότε $K'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow K(x) \uparrow \Rightarrow K(x)$: "1-1"

$(2) \Rightarrow K((g(2)-10)^2) = K((80-g(2))^2) \xLeftrightarrow{K: \text{"1-1"}}$

$(g(2)-10)^2 = (80-g(2))^2 \Leftrightarrow \begin{cases} g(2) - 10 = 80 - g(2) \Leftrightarrow g(2) = 45 \\ \text{ή} \\ g(2) - 10 = -80 + g(2) \text{ Αδύνατη.} \end{cases}$

4. $g(0) = -2$ και $g(2) = 45$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

$g(0) \cdot g(2) < 0 \xrightarrow{g \text{ συνεχής } [0,2]}$ Από Θ.Bolzano $\exists x_0 \in (0,2)$: $g(x_0) = 0$

Το ζητούμενο: $g(x_1) g(x_2) = -2x_1 x_2$

οπότε αρκεί οι εξισώσεις $g(x_1) = -2x_1$ και $g(x_2) = x_2$ να έχουν ρίζες.

Έστω $M(x) = g(x) + 2x$ $\begin{cases} M(0) = g(0) = -2 \\ M(x_0) = g(x_0) + 2x_0 = 2x_0 > 0 \end{cases}$

οπότε $M(0) M(x_0) < 0 \xrightarrow[\text{στο } [0, x_0]]{M(x) \text{ συνεχής}}$ Από Θ.Bolzano $\exists x_1 \in (0, x_0)$:

$M(x_1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{g(x_1) = -2x_1} \quad (3)$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

Έστω $h(x) = g(x) - x$

$h(x_0) = g(x_0) - x_0 = -x_0 < 0 \quad (x_0 \in (1,2))$

$h(2) = g(2) - 2 = 15 - 2 = 13 > 0$

$h(x_0) h(2) < 0$ και $h(x)$ συνεχής στο $[x_0, 2]$ ως πρ. συν.

Από Θ Bolz. $\exists\, x_2 \in (x_0, 2)$: $h(x_2) = 0 \Leftrightarrow g(x_2) = x_2$ (4)

Από (3)·(4) $\Rightarrow g(x_1) g(x_2) = -2x_1 x_2$

$\Leftrightarrow g(x_1) g(x_2) + 2x_1 x_2 = 0.$